На правах рукописи

Солохин Николай Николаевич

О КВАЗИКОРРЕКТНОСТИ СМЕШАННОГО КРАЕВОГО УСЛОВИЯ В ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Казань - 2013

Работа выполнена на кафедре высшей математики
Ростовского государственного строительного университета

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент
Казак Виталий Всеволодович.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Фоменко Валентин Трофимович

кандидат физико-математических наук, доцент
Субботин Владимир Иванович

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО
«Самарский государственный университет»

Защита состоится 21 февраля 2013 г. в 16:00 на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлёвская, д. 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Казанского (Приволжского) федерального университета (г. Казань, ул. Кремлёвская, 18)

Автореферат разослан « » января 2013 г. и размещён на официальном сайте ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»: www.kpfu.ru

Ученый секретарь
диссертационного
совета Д 212.081.10,
к.ф.м.н., доцент: Липачёв Евгений Константинович

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Поверхности с краями (незамкнутые поверхности) являются всегда нежесткими, т.е. допускают нетривиальные бесконечно малые изгибания, если они вовсе не стеснены связями. Поверхности положительной кривизны с краями могут быть жесткими лишь при наличии некоторых внешних связей, которые называют ***жесткими связями***[1]. Конечно, не всякие связи обеспечивают жесткость поверхности. Всякая связь, очевидно, ограничивает возможные формы бесконечно малых изгибаний, но не всегда их полностью исключает. Особый интерес представляют те нежесткие связи, которые допускают лишь конечное многообразие бесконечно малых изгибаний. Это означает, что существует конечное число линейно независимых полей смещений $\vec{U}^{(1)},...,\vec{U}^{(k)}$, которые совместимы с наличными связями, причем любое поле смещений, совместимое с этими связями, выражается в виде $\vec{U}=c_1\vec{U}^{(1)}+...+c_k\vec{U}^{(k)}$, где $c_1,c_2,...,c_k$ – произвольные вещественные постоянные.

Если при этом все поля $\vec{U}^{(j)}$ – тривиальные, то поверхность будет ***геометрически жесткой***. В этом случае, очевидно, число $k \le 6$. Если же среди полей $\vec{U}^{(j)}$ имеются и нетривиальные, то тогда поверхность будет нежесткой. Это всегда так будет, если число $k > 6$. Если поверхность допускает конечное многообразие нетривиальных полей смещений, то будем говорить, что наличные связи являются ***почти жесткими***. Такого вида нежесткость поверхности еще можно охарактеризовать тем, что связи допускают конечное многообразие полей изгибаний. Иными словами, существует конечное число линейно независимых комплексных функций изгибаний $w'^{(1)},...,w'^{(n)}$, удовлетворяющих уравнению $\partial_{\bar{z}}w+Aw+B\overline{w}=0$ ($A,B \in L_p$, $p>2$), причём любая другая функция из-

---

[1] Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Физматгиз. 1959. С. 481 - 482.

гибаний, совместимая с наличными связями, выражается в виде линейной комбинации вида $w' = c_1 w'^{(1)} + ... + c_n w'^{(n)}$. Число n называют в таком случае ***степенью свободы наличных почти жестких связей***[2].

При исследовании изгибаний и бесконечно малых изгибаний поверхностей с краем на поведение поверхности при деформации ставятся какие-либо краевые условия. Обычно эти условия состоят или в ограничениях на способ изменения пространственного расположения края (кинематические связи) или же на характер изменения каких-либо геометрических характеристик поверхности вдоль края.

Существует классификация кинематических связей в зависимости от характера разрешимости однородной и неоднородной краевой задачи с использованием таких терминов, как корректность, оптимальность, квазикоректность, сверхоптимальность и т. д. Встречаются следующие виды кинематических связей:

1)Бесконечно малое изгибание скольжения относительно плоскости – это такая деформация, когда расстояния от каждой точки края L до данной плоскости не изменяются (с соответствующим пониманием этого при бесконечно малых изгибаниях данного порядка). О таких изгибаниях иногда говорят, что поверхность закреплена относительно плоскости. Если $\vec{n}$ – нормаль к плоскости, $\vec{U}$ – вектор деформации, то изгибания скольжения относительно плоскости выражаются краевым условием $\left(\vec{U}\vec{n}\right)_L = 0$ (Либман Н., Погорелов А.В.)

2)Если вдоль края L поверхности S задано векторное поле $\vec{l}$ и если деформации $\vec{U}$ ищутся с краевым условием $\left(\vec{U}\vec{l}\right) = \sigma$, где σ – заданная функция, то говорят об изгибаниях обобщённого скольжения. Термин введён

[2] Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Физматгиз. 1959. С. 483.

И.Х.Сабитовым[3].

Векуа И.Н. и его учениками рассматривается также условие обобщённого поворота $(\vec{V}\vec{l}) = \sigma$, где $\vec{V}$ – векторное поле вращения бесконечно малого изгибания поверхности.

3)Если край L поверхности S лежит на некоторой поверхности ∑ и в ходе деформации край остается на ∑, то говорят об изгибаниях с втулочной связью, а ∑ называют втулкой; термин введён Векуа И.Н.[4] При бесконечно малых изгибаниях втулочную связь можно рассматривать как частный случай обобщённого скольжения, когда векторное поле $\vec{l}$ составлено из нормалей к S вдоль L.

4)Если в ходе деформации расстояния от каждой точки края до некоторой точки O не изменяются, то говорят об изгибаниях скольжения относительно точки O; часто также говорят, что поверхность закреплена относительно точки O (Погорелов А.В.). Для бесконечно малых изгибаний 1-го порядка условие закрепленности относительно точки и условие закрепленности относительно плоскости можно перевести друг в друга, если между поверхностью и точкой (плоскостью) можно провести плоскость.

И.Н.Векуа и его ученики изучали характер различных внешних связей. Так, основное внимание уделено изучению внешней связи обобщённого скольжения $(\vec{U}\vec{l}) = \sigma$. Эта связь включает в себя втулочные связи, скользящее изгибание относительно плоскости, закрепление поверхности относительно точки и другие виды связей. В общих чертах эти исследования показывают, что поверхность с связью $(\vec{U}\vec{l}) = \sigma$ обладает как свойствами квазикорректной, корректной или оптимальной жесткости, так и свойствами неоптимальной жёсткости. К настоящему времени эта внешняя связь достаточно хорошо изучена.

Условия на геометрические характеристики края весьма многочисленны.

---

[3] Сабитов И.Х. Бесконечно малые изгибания выпуклых поверхностей с краевым условием обобщённого скольжения / И.Х. Сабитов // ДАН СССР. – 1962. – 147, №4. – С.793 – 796 (РЖМат, 1964, 10А419).

[4] Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Физматгиз. 1959. С. 467

Чаще всего накладывают условия на характер изменения нормальной кривизны края, его геодезического кручения, средней кривизны поверхности вдоль края и т.д., встречаются комбинации этих условий, например $\alpha\delta k_n + \beta\delta\chi_g = \sigma$.

Существует классификация кинематических связей в зависимости от характера разрешимости однородной и неоднородной краевой задачи с использованием таких терминов, как корректность, оптимальность и т. д.

Цель и задачи диссертационного исследования. Целью настоящей работы является изучение кинематической внешней связи вида

$$a\left(\overline{U}\overline{l}\right)+b\left(\overline{V}\overline{L}\right)=c \tag{1}$$

где $\vec{U}$, $\vec{V}$ – векторные поля соответственно смещения и вращения бесконечно малого изгибания поверхности, *a*, *b*, *c* – действительные функции, заданные на границе ∂S поверхности S, $\bar{l}$ и $\bar{L}$ – некоторые векторные поля, а также изучение её характера и поведения поверхности в отношении бесконечно малых изгибаний при этой связи.

Геометрический смысл внешней связи (1) заключается в том, что в каждой точке края ∂S поверхности S задаётся линейная комбинация смещений точек края и угла поворота касательных плоскостей вокруг вектора нормали к поверхности. При $b=0$ связь (1) даёт условие обобщённого скольжения, а при $a=0$ – условие обобщённого поворота.

Граничное условие (1) называется ***квазикорректным с p степенями свободы***, если однородное условие (c = 0) совместимо с p линейно независимыми бесконечно малыми изгибаниями поверхности *S*, а неоднородное условие совместимо с бесконечно малыми изгибаниями для любой функции *c*. Векторные поля $\vec{l}$ и $\vec{L}$ назовём ***собственными***, если условие (1) не является квазикорректным.

Перечислим основные задачи исследования:

- вывести краевое условие для случая, когда векторное поле $\bar{l}$ не принадлежит поверхности,

- установить признак квазикорректности краевого условия смешанного типа,

- получить картину распределения собственных векторных полей для краевого условия (1),

- рассмотреть распределение собственных векторных полей на примерах сферической поверхности и параболоида вращения.

Научная новизна. Основные результаты работы, выносимые на защиту, являются новыми. Для обоснования данного высказывания рассмотрим обзор результатов, полученных ранее в этом направлении.

Условие (1) изучалось при различных ограничениях на векторные поля $\bar{l}$ и $\bar{L}$, и на поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве.

Так профессором В.Т. Фоменко сформулирован признак квазикорректности граничного условия (1) для односвязных поверхностей S_f класса $C^{3,\mu}$, $0<\mu<1$ положительной гауссовой кривизны $K \ge k_0 > 0$, однозначно проектирующихся на плоскость *Oxy* в направлении оси *Oz*, заданных уравнением $z = f(x,y)$ и случая, когда векторное поле $\bar{l}$ класса C^{μ}, $0<\mu<1$ принадлежит поверхности, край поверхности $\partial S_f \in C^{1,\mu}$, $0<\mu<1$. Там же описана возможная картина распределения собственных векторных полей для некоторых специальных однопараметрических семейств внешних связей.

Учеником В.Т. Фоменко Нгуеном Тхань Дао была изучена задача о бесконечно малых изгибаниях поверхностей положительной гауссовой кривизны с краем при внешних связях вида $\vec{V}\vec{n} = c(s)$ и $a(s)(\vec{V}\vec{n}) + b(s)(\vec{U}\vec{l}\,) = c(s)$ при условии, что $\vec{l} \in S$.

Наконец, В.В. Казаком изучено условие обобщённого скольжения $\vec{U}\vec{l} = c$ в случае, когда векторное поле $\vec{l}_\alpha \notin S$, $\vec{l}_\alpha \in C^{1,\nu}$, $0<\nu<1$.

В настоящей работе рассматриваются поверхности трёх типов: 1)поверхности, заданные уравнением $z = f(x,y)$; 2)поверхности второго порядка положительной кривизны, 3)поверхности, заданные уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ и случаи, когда векторное поле $\vec{l}$ как принадлежит, так и не принадлежит поверхности.

Методы исследования. В теории бесконечно малых изгибаний поверхностей применяются методы современной математики: тензорный анализ, функциональный анализ, теория интегральных уравнений и др.

Основные результаты диссертационной работы, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты.

1) Получен вывод краевого условия (1) для поверхностей, заданных уравнением $z = f(x,y)$ с краем и доказана квазикорректность этого условия для данного класса поверхностей.

2) Приведено решение модельной задачи для параболоида вращения.

3) Получен вывод краевого условия (1) для случаев, когда векторное поле $\vec{l}$ как принадлежит, так и не принадлежит поверхности положительной кривизны с краем, заданной уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$.

4) Доказана квазикорректность краевого условия смешанного типа (1) для поверхностей второго порядка положительной гауссовой кривизны с краем.

5) Получено достаточное условие квазикорректности внешней связи (1).

6) Изучена картина распределения собственных векторных полей в нормальных сечениях для сферических сегментов.

Достоверность полученных в диссертации результатов обусловлена тем, что при исследовании использованы проверенные и строго обоснованные методы исследований, а также тем, что основные результаты диссертации являются обобщением известных ранее результатов и имеют подтверждение на примерах модельных задач.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Предложенные в ней результаты могут быть использованы при дальнейшем развитии теории бесконечно малых изгибаний поверхностей разных классов.

Апробация работы. Результаты диссертации неоднократно докладывались в Международной школе-семинаре по геометрии и анализу, посвящённой памяти Н.В. Ефимова в 2002, 2004, 2006, 2008 годах, и на международной конференции по геометрии и топологии г. Черкаси в 2007 году.

Результаты диссертации также докладывались и обсуждались на семинарах кафедры геометрии в Южном федеральном университете и кафедры алгебры и геометрии в Таганрогском государственном педагогическом институте им. А.П. Чехова.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 16 работах.

Объём и структура работы. Диссертация объёмом 123 страницы состоит из введения, трёх глав, списка литературы, насчитывающего 27 наименований.

Краткое содержание диссертации

В настоящей работе изучается квазикорректность краевого условия смешанного типа в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны с краем.

Сформулируем коротко результаты, полученные в диссертации:

В главе I краевое условие смешанного типа

$$\alpha(\overline{U}\overline{l}) + \beta(\overline{V}\overline{n}) = \sigma \tag{2}$$

изучается для поверхностей, однозначно проектирующихся на плоскость, т.е. заданных уравнением $z = f(x;y)$, где $\overline{U}$, $\overline{V}$ - векторы смещения и вращения бесконечно малого изгибания поверхности, $\bar{l}$ - заданное векторное поле, α, β, σ - заданные функции класса $C^{2,\mu}$, $0 < \mu < 1$.

Сначала рассмотрены вспомогательные утверждения:

Утверждение 1. *Для односвязных поверхностей положительной кривизны* $K \geq k_0 > 0$ *с краем, заданных уравнением* $z = f(x,y)$, *нахождение бесконечно малых изгибаний сводится к решению уравнения*

$$V_{\bar{z}} + \frac{q_1}{1-q_2\overline{q}_2}V_z + \frac{-\overline{q}_1 q_2}{1-q_2\overline{q}_2}\overline{V}_{\bar{z}} + \frac{q_{1z} - q_2 q_{2\bar{z}}}{1-q_2\overline{q}_2}V + \frac{q_{2\bar{z}} - q_2 q_{1\bar{z}}}{1-q_2\overline{q}_2}\overline{V} = 0, \tag{3}$$

где $q_1 = q_2 = -\dfrac{r - t + 2is}{2(r+t)}$, $r = f_{xx}$, $s = f_{xy}$, $t = f_{yy}$, $V = w_z$, w *- комплексная функция изгибания.*

Всякому решению V *этого уравнения соответствуют векторные поля смещений* $\overline{U}$ *, зависящие от 2 действительных параметров.*

Утверждение 2. *Всякое решение уравнения (3) представимо в виде*

$$V = \frac{r+t}{2}\zeta + i\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\nu, \tag{4}$$

где ζ *- вертикальная составляющая поля* $\overline{U}$ *,* ν *- характеристическая функция (функция Вейнгартена).*

Далее для односвязной поверхности $S_f:\ z = f(x,y)$ с краем ∂S_f, $(x,y) \in D$, расположенной выпуклостью вниз, вводится понятие вертикального сечения. Пусть Λ_0 - множество единичных векторных полей $\bar{l}_0 \in S$ вдоль края ∂S_f.

Определение*. *Вертикальным сечением $P(\bar{l}_0)$ множества $\Lambda = \bigcup\limits_{\bar{l}_0 \in \Lambda_0} P(\bar{l}_0)$ всех векторных полей вдоль ∂S называется совокупность единичных векторных полей $\bar{l}_\alpha$, для которых проекции $\bar{l}_\alpha$ и $\bar{l}_0$ на плоскость Oxy коллинеарны.

Далее краевое условие (5) приводится к виду

$$\mathrm{Re}\left\{\overline{a(t)}w_t + c\overline{b(t)}w(t)\right\} = \sigma, \tag{5}$$

где $a(t) = \dfrac{2\sqrt{1+p^2+q^2}}{r+t}\alpha + i\beta$, $b(t) = \alpha\sqrt{1+p^2+q^2}\,(l^1 + il^2)$, $c = \dfrac{\sin\gamma}{\cos\gamma - f_{\bar{l}_1}\sin\gamma}$, при этом $Ind\, a(t) = Ind(\alpha + i\beta) \equiv n$. Для семейства векторных полей $\bar{l} = \bar{k} + \varepsilon c_1 \bar{l}_0$ условие (5) примет вид $\mathrm{Re}\{\overline{a_1(t)}w_t + \varepsilon\overline{b_1(t)}w\} = \sigma$, где $\overline{a_1(t)}$, $\overline{b_1(t)}$ - известные функции.

Утверждение 3. *Пусть* S_f *- поверхность положительной кривизны с краем* ∂S_f, $\bar{l}_0$ *- векторное поле, принадлежащее поверхности, заданное вдоль края. Тогда нахождение бесконечно малых изгибаний поверхности* S_f*, удовлетворяющих на границе* ∂S_f *условию (2), где* $\bar{l} = \bar{k} + c\bar{l}_0$, α, β, c *- заданные функции,* $\bar{k}$ *- орт оси* Oz*, сводится к решению уравнения (3) при краевом условии (5).*

В этой главе доказывается

Теорема. *Краевое условие* $\mathrm{Re}\{\overline{a_1(t)}w_t + \varepsilon\overline{b_1(t)}w\} = \sigma$ *является квазикорректным с* $2n+3$ *степенями свободы при* $n = Inda_1 \geq 0$ *для всех значений* $\varepsilon \in (-\infty;+\infty)$, *за исключением, быть может, счётного множества* ε_k, $k = 1,2,....$*Значениям* $\varepsilon = \varepsilon_k$, $k = 1,2,...$ *соответствуют собственные векторные поля условия (2).*

В этой же главе рассмотрены задачи для параболоида вращения (как для нулевого значения индекса краевого условия, так и для ненулевого индекса), демонстрирующие реализацию доказанной теоремы.

Для параболоида вращения $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$ рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \partial_{\bar{z}} w = 0, z \in D : |z| \leq 1 \\ \mathrm{Re}(\hat{a}\partial_t w - a\varepsilon t^{-(n+1)} w) = 0, t \in \partial D \end{cases},$$

где $\hat{a} = a + \dfrac{b}{\sqrt{5}} i$, $a, b = const$.

Тогда при $n+1 > 0$ получаем

Утверждение 1. *Для параболоида вращения* P_f *, подчинённого на краю* ∂P_f *краевому условию* $a(\overline{U}l_\varepsilon) + b(\overline{V}\overline{n}) = 0$, *где* a , b *- действительные константы, данное краевое условие является квазикорректным с* $2n+3$ *степенями свободы для любого* $\varepsilon \neq 0$.

При $n = 0$ получаем

Утверждение 2. *Для параболоида вращения* P_f *, подчинённого на краю* ∂P_f *краевому условию* $a(\overline{U}l_\varepsilon) + b(\overline{V}\overline{n}) = 0$, *где* $a \neq 0$, b *- действительные константы, данное краевое условие является квазикорректным с 3 степенями свободы для любого* $\varepsilon \neq 0$.

При $n+1 < 0$ получаем

Утверждение 3. *Для параболоида вращения* P_f *, подчинённого на краю* ∂P_f *краевому условию* $a(\overline{U}l_\varepsilon) + b(\overline{V}\overline{n}) = 0$, *где* $a \neq 0$, b *- действительные константы,* *данное краевое условие является квазикорректным с* $2|n|+1$ *степенями свободы для любого* $\varepsilon \neq 0$.

Для ненулевого значения индекса краевой задачи $Ind\,\bar{\hat{a}} = Ind\left(a - \frac{b}{\sqrt{5}}i\right) \neq 0$ получим следующую картину:

I. $k > 0$, $n+1 > 0$.

1) при $k > n+1$ решение зависит от $2k+3$ параметров.

2) при $k = n+1$ решение зависит от $2k+3$ параметров.

3) при $k < n+1$ решение зависит от $2n+3$ параметров.

II. $k > 0$, $n+1 < 0$.

1) при $k > m$ решение зависит от $2k+1$ параметров.

2) при $k = m$ решение зависит от $2k+1$ параметров.

3) при $k < m$ решение зависит от $2k+3$ параметров.

III. $k > 0$, $n+1 < 0$.

1) при $k = n+1$ решение зависит от 2 параметров.

2) при $k > n+1$ решение зависит от 2 параметров.

3) при $k < n+1$ получаем нулевое решение.

IV. $k < 0$, $n+1 > 0$.

1) при $-k > n+1$ решение зависит от $2n+3 = 2|k|-1$ параметров.

2) при $-k = n+1$ решение зависит от $2|k|+1$ параметров.

3) при $-k < n+1$ решение зависит от $2|k|+3$ параметров.

Утверждение 4. *Для параболоида вращения* P_f *, подчинённого на краю* ∂P_f *краевому условию* $a(\overline{U}l_\varepsilon) + b(\overline{V}\overline{n}) = 0$*, где* a *,* b *- действительные функции, данное краевое условие является квазикорректным для любого* ε *.*

Во второй главе изучаются поверхности положительной кривизны, заданные уравнением $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$, в общем случае локально-выпуклые.

В первом параграфе главы II представлен вывод краевого условия $R(\vec{U},\vec{V}) \equiv \alpha(s)\left(\vec{U}\vec{l}\right) + \beta(s)(\vec{V}\vec{n}) = \gamma(s)$ для случая, когда векторное поле $\vec{l}$ принадлежит поверхности. Для значения индекса краевой задачи $n \equiv Ind(\alpha - i\beta) \geq 0$ здесь доказана

Теорема. *Пусть* S *– кусок поверхности второго порядка положительной кривизны* $K \geq k_0 > 0$, $S \in C^{3,\mu}$, $0 < \mu < 1$ *с краем* ∂S, $\partial S \in C^{2,\mu}$, $0 < \mu < 1$, *подчинённый на краю внешнему условию* $\varepsilon\alpha(s)(\vec{U}\vec{l}) + \beta(s)(\vec{V}\vec{n}) = \gamma(s)$, *где* $\beta(s) \neq 0$, $s \in \partial S$, $\vec{l} \in S$, векторное поле $\vec{l}$ и функции α, β, γ принадлежат классу C^{μ}, $\mu > 1$.

Тогда внешняя связь $\varepsilon\alpha(s)(\vec{U}\vec{l}) + \beta(s)(\vec{V}\vec{n}) = \gamma(s)$ *квазикорректна с* $p = 3$ *степенями свободы для любого* $\varepsilon \in (-\infty, \infty)$ *исключая быть может дискретный ряд значений* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ $(0 < |\varepsilon_1| < |\varepsilon_2| < \ldots)$.

Стоит отметить, что аналогичное утверждение доказано учеником В.Т.Фоменко Нгуен Тхань Дао для поверхностей, однозначно проектирующихся на плоскость.

Во втором параграфе дан вывод краевого условия (2) для случая, когда векторное поле $\vec{l}$ не принадлежит поверхности.

В третьем параграфе мы устанавливаем признак квазикорректности краевого условия смешанного типа

$$a(\vec{U}\vec{l}) + b(\vec{V}\vec{n}) = c \qquad (6)$$

для поверхностей S положительной кривизны с краем, заданных уравнением $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ для случая, когда индекс краевой задачи $n = Ind(a - ib) \geq 0$. Нами доказана следующая

Теорема. *Для односвязной поверхности S,* $S \in C^{3,\mu}$, $0 < \mu < 1$ *положительной гауссовой кривизны* $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = const$, *векторное поле* $\vec{l}$, $\vec{l} \notin S, \vec{l} \in C^{1,\mu}, 0 < \mu < 1$ *является собственным тогда и только тогда, когда краевое условие (6) почти жёстко с* $p > 2Ind(\overline{a + ib}) + 3$ *степенями свободы. Неоднородная связь (6) совместима с бесконечно малыми изгибаниями тогда и только тогда, когда функция* $c(s)$ *удовлетворяет* $p - 2Ind(\overline{a + ib}) - 3$ *условиям* *разрешимости. Всякое поле, не являющееся собственным, порождает квазикорректную, почти жёсткую с $p = 2n + 3$ степенями связь (6).*

В четвёртом параграфе мы изучаем задачу о бесконечно малых изгибаниях поверхностей второго порядка с краем при внешней связи вида $\operatorname{Re}\{a_1(t)\partial_t \hat{w}(t) + \varepsilon b_1(t)\hat{w}(t)\} = c, t \in \partial D$, где $a_1(t)$, $b_1(t)$ - известные функции. Нами доказана следующая

***Теорема**. Пусть S – кусок поверхности второго порядка положительной гауссовой кривизны $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = const$, с краем $\partial S \in C^{1,\mu}$ $(0 < \mu < 1)$ в евклидовом пространстве E^3. Тогда условие $\operatorname{Re}\{a_1(t)\partial_t \hat{w}(t) + \varepsilon b_1(t)\hat{w}(t)\} = c$, $t \in \partial D$, квазикорректно с $p = 2n + 3$ степенями свободы для всех значений ε, $\varepsilon \in (-\infty; \infty)$, исключая, быть может дискретный ряд значений ε_k, $k = 1,2,...$ $(0 < |\varepsilon_1| < |\varepsilon_2| < ...)$, где $n = Ind a_1 \geq 0$.*

В пятом параграфе устанавливается существование условий, при выполнении которых внешняя связь (6) является квазикорректной. Пусть $S \in C^{3,\mu}$, $0 < \mu < 1$ – односвязная поверхность положительной кривизны $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = const$, с краем $\partial S \in C^{2,\mu}$, $0 < \mu < 1$. Пусть, далее, на границе ∂S поверхности S заданы вещественные функции a, b и c и векторное поле $\vec{l}$ класса $C^{1,\mu}$, $0 < \mu < 1$, не принадлежащее поверхности. Пусть $\vec{t}$ – единичный касательный к ∂S вектор (тангенциальный вектор края ∂S), $\vec{n}$ – единичный вектор нормали поверхности S, направленной в сторону вогнутости поверхности, и единичный касательный вектор к краю ∂S, ориентированный так, что при обходе по ∂S поверхность S лежит слева; $\vec{\eta}$ – тангенциальная нормаль ($\vec{\eta} = [\vec{t}\vec{n}]$). Пусть $\vec{l}_\tau$ – проекция $\vec{l}$ на касательную к S плоскость. Предположим, что векторное поле $\vec{l}_\tau$ не касательно к границе поверхности в каждой точке края. Обозначим $\beta = \beta(s)$ – угол между $\vec{\eta}$ и $\vec{l}_\tau$, где отсчёт угла производится от $\vec{\eta}$ до $\vec{l}_\tau$ против хода часовой стрелки, если смотреть со стороны вектора $\vec{n}$. Обозначим угол между $\vec{l}_\tau$ и $\vec{l}$ через α, считая, что отсчёт производим от $\vec{l}_\tau$ до $\vec{l}$ против хода часовой стрелки, если смотреть из конца вектора $\vec{t}$. В таких обозначениях векторное поле $\vec{l}$ однозначно определяется заданием углов $\alpha = \alpha(s)$ и $\beta = \beta(s)$ как функций длины дуги контура L. Подчиним поверхность условию (6). Справедлива следующая

Теорема. *Пусть вдоль края* ∂S *задано семейство векторных полей* $\vec{l}_\alpha(s)$, *определяемых углами* $\alpha(s)$ *и* $\beta_0(s)$, *где* $\beta_0(s)$ *– фиксированная функция из интервала* $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, *а* $\alpha(s)$ *произвольная функция. Пусть, кроме того,* $a(s)b(s) < 0$, $Ind\left(\overline{a+ib}\right) = 0$ *и* $\left(\vec{t}\vec{l}\right) < 0$. *Тогда существует константа* $C_0 > 0$, *зависящая от поверхности* S, *края* ∂S *и векторного поля* $\vec{l}$, *такая, что при* $C_0 \le \max\left|\frac{a\cos\alpha}{b\sqrt{K}}\right| < \infty$ *поверхность с внешней связью (6) является квазикорректной с 3 степенями свободы. Кроме того, существует такая константа* $\alpha_0 > 0$, *что поверхность с условием (6) является квазикорректной с 3 степенями свободы, если* $\frac{\pi}{2} - \alpha_0 < \alpha(s) < \frac{\pi}{2}$.

В третьей главе работы изучается картина распределения собственных векторных полей для сферических сегментов, подчиненных при бесконечно малом изгибании внешней связи $a\left(\vec{U}\vec{l}_\varepsilon\right) + b\left(\vec{V}\vec{n}\right) = 0$. При этом рассмотрены две модельные задачи: для ненулевого значения индекса краевой задачи и для нулевого значения индекса. Стоит отметить, что аналогичные модельные задачи рассмотрены В.В. Казаком[5] при $b = 0$.

Обозначим через Λ − множество векторных полей $\bar{l}$, а Λ_0 − множество единичных векторных полей $\bar{l}_0$ класса $C^{1,\nu}$. Для каждого поля $\bar{l}_0$ образуем множество $\Lambda(\vec{l}_0)$ единичных векторных полей $\vec{l}_\alpha$, тангенциальная составляю-

[5] Казак В.В. Исследование условия обобщённого скольжения в теории бесконечно малых изгибаний: дисс. канд. физ. – мат. наук. Ростов-на-Дону, 1973.

щая которых коллинеарна вектору $\vec{l}_0$. Множество $\Lambda(\vec{l}_0)$ называют ***нормальным сечением множества*** Λ по направлению векторного поля $\vec{l}_0$.

В этой главе доказана

Теорема. *Пусть* S_h *– сферический сегмент,* h *– высота сферического сегмента,* $|h|<1$, $\vec{l}_{\alpha_\varepsilon}$ *– семейство векторных полей, определяемых углами* $\alpha_\varepsilon = arcctg\dfrac{\varepsilon}{(1+h)\left(\dfrac{1-n}{1+n}\right)^{n+1/2}}$, *принадлежащих нормальному сечению* $\Lambda(\vec{l}\,(n))$ *с направляющим вектором* $\vec{l}\,(n)$. *Тогда*

1) при $n>0$ *в семействе векторных полей* $\vec{l}_{\alpha_\varepsilon}$ *существует конечное множество собственных векторных полей* $\vec{l}_{\alpha_{\varepsilon_k}}$, $k=2,3,...,\dfrac{n-2}{2},...,n-2$, *если* n *– чётное и* $k=2,3,...,\dfrac{n-1}{2},...,n-2$, *если* n *– нечётное.*

2) при $n=0$ *в семействе векторных полей* $\vec{l}_{\alpha_\varepsilon}$ *существует только счётное множество собственных векторных полей* $\vec{l}_{\alpha_{\varepsilon_k}}$, $k=0,1,2,...$.

3) при $n=-1$ *в семействе векторных полей* $\vec{l}_{\alpha_\varepsilon}$ *собственных векторных полей нет, если* $h\neq 0$ *и существует только одно собственное поле* $\vec{l}_{\alpha_0}=\vec{l}_{\frac{\pi}{2}}$, *если* $h=0$.

4) при $n<-1$ *всякое векторное поле* $\vec{l}_{\alpha_\varepsilon}$ *является собственным, если* $h=0$ *и нет собственных векторных полей, если* $h\neq 0$.

Для ненулевого значения индекса краевого условия доказана

Теорема. *Для сферических сегментов, подчинённых на краю внешней связи* $a(\vec{U}\vec{l}_\varepsilon)+b(\vec{V}\vec{n})=0$ *условие* $a(\vec{U}\vec{l}_\varepsilon)+b(\vec{V}\vec{n})=0$ *является квазикорректным с* $2k+3$ *степенями свободы, где* $k=Ind(a+ib)\geq 0$ *для всех значений* ε, $\varepsilon\in(-\infty;\infty)$, *исключая дискретный ряд значений.*

В этой же главе доказаны ещё следующие факты, касающиеся бесконечно малых изгибаний сферических сегментов:

Утверждение 1. *Для полусферы* S_0 $(h=0)$ *условие* $a\left(\overline{U}\overline{l}_{\varepsilon}\right)+b\left(\overline{V}\overline{n}\right)=0$ *является квазикорректным с* $(2k+3)$ *степенями свободы для любого векторного поля* $\vec{l}_{\varepsilon}$.

Утверждение 2. *Для любого фиксированного сферического сегмента* S_h $(h\neq 0)$ *краевое условие* $a\left(\overline{U}\overline{l}_{\varepsilon}\right)+b\left(\overline{V}\overline{n}\right)=0$ *является квазикорректным с* $2k+3$ *степенями свободы для всех значений* ε, $\varepsilon\in(-\infty;\infty)$, *исключая, конечное число* $\{h-1,h,h+1,...,h+2n+1\}$ *значений.*

Публикации по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК РФ

1. Солохин Н.Н. Распределение собственных векторных полей для краевого условия смешанного типа / Н.Н. Солохин // Известия Высших Учебных Заведений. Северо – кавказский регион. Естественные науки. – 2010. – №2. – С. 22 – 26. (0,3 п.л.)

Публикации в других изданиях

2. Солохин Н.Н. Об одной краевой задаче в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей / В.В. Казак В.В., Н.Н. Солохин // Тезисы докладов Международной школы – семинара по геометрии и анализу, посвящённая 90 – летию Н.В. Ефимова. – Ростов – на – Дону, 2000. – С. 39 – 40. (диссертанта – 0,06 п.л.)
3. Солохин Н.Н. О квазикорректности смешанного краевого условия в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей / В.В. Казак В.В., Н.Н. Солохин // Труды участников Международной школы – семинара по геометрии и анализу памяти Н.В.Ефимова. – Ростов – на – Дону, 2002. – С. 32– 33. (диссертанта – 0,06 п.л.)

4. Солохин Н.Н. Распределение собственных векторных полей внешней связи $R(\vec{U},\vec{V}) = a(\vec{U}\vec{l}) + b(\vec{V}\vec{L}) = c$ / Н.Н. Солохин // Наука и образование. Известия Южного Отделения РАО и РГПУ. – Ростов – на – Дону, 2002. – № 3. – С. 228– 230. (0,2 п.л.)
5. Солохин Н.Н. Об одной модельной задаче в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей / Н.Н. Солохин // Наука и образование. Известия Южного отделения РАО и РГПУ. – Ростов – на – Дону, 2003. – № 3. – С. 211 – 214. (0,25 п.л.)
6. Солохин Н.Н. Распределение собственных векторных полей краевого условия смешанного типа / В.В. Казак В.В., Н.Н. Солохин // Труды участников Международной школы – семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. – Ростов – на – Дону, 2004. – С. 30– 31. (диссертанта – 0,06 п.л.)
7. Солохин Н.Н. Распределение собственных векторных полей в сферических сегментах для краевого условия смешанного типа /В.В. Казак В.В., Н.Н. Солохин // Тезисы докладов XIV международной конференции «Математика, Экономика. Образование». – Ростов – на – Дону, издательство ООО «ЦВВР», 2006. – С. 104. (диссертанта – 0,03 п.л.)
8. Солохин Н.Н. Распределение собственных векторных полей для краевого условия $R(\overline{U},\overline{V}) = a(\overline{U}\overline{l}) + b(\overline{V}\overline{n}) = c$ / В.В. Казак В.В., Н.Н. Солохин // Труды участников Международной школы – семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова, Абрау – Дюрсо, база отдыха Ростовского госуниверситета ″Лиманчик″, 5 – 11 сентября 2006 года. – Ростов – на – Дону, 2006. – С. 42– 43. (диссертанта – 0,06 п.л.)
9. Солохин Н.Н. Существование несобственного векторного поля в данном семействе векторных полей / В.В. Казак В.В., Н.Н. Солохин // Тезисы докладов 7−й международной конференции по геометрии и топологии. – Черкаси. ЧДТУ. 2007. – С. 32– 33. (диссертанта – 0,03 п.л.)

10. Солохин Н.Н. Распределение собственных векторных полей условия смешанного типа для сферических сегментов / В.В. Казак В.В., Н.Н. Солохин // Вестник Таганрогского государственного педагогического института. Физико – математические и естественные науки, №1. – Таганрог, 2008. – С. 35 – 41. (диссертанта – 0,25 п.л.)
11. Солохин Н.Н. О квазикорректности смешанного краевого условия для одного класса поверхностей / В.В. Казак В.В., Н.Н. Солохин // Труды участников Международной школы – семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова, Абрау– Дюрсо, база отдыха Ростовского госуниверситета ″Лиманчик″, 9 – 15 сентября 2008 года. – Ростов – на – Дону, 2008. – С. 35– 36. (диссертанта – 0,06 п.л.)
12. Солохин Н.Н. Некоторые признаки квазикорректности условия обобщённого поворота / В.В. Казак В.В., Н.Н. Солохин // XVI Международная конференция. Математика. Экономика. Образование. V Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения». 27 мая – 3 июня 2008. – Ростов – на – Дону, 2008. – С. 121. (диссертанта – 0,03 п.л.)
13. Солохин Н.Н. Картина распределения собственных векторных полей для смешанного краевого условия / Н.Н. Солохин // Материалы международной научно-практической конференции. – Ростов – на – Дону: РГСУ, 2009. – С. 115. (0,06 п.л.)
14. Солохин Н.Н. Изучение смешанного краевого условия для поверхностей, однозначно проектирующихся на плоскость / Н.Н. Солохин // Материалы международной научно-практической конференции. – Ростов – на – Дону: РГСУ, 2010. – С. 114 – 116. (0,2 п.л.)
15. Солохин Н.Н. О квазикорректности смешанного краевого условия для поверхностей положительной кривизны / В.В. Казак В.В., Н.Н. Солохин // Сборник тезисов Международной конференции «Метрическая геометрия

поверхностей и многогранников, посвящённая 100 – летию со дня рождения Н.В.Ефимова. – Москва, 2010. – С. 28 – 29. (диссертанта – 0,06 п.л.)

16. Солохин Н.Н. О квазикорректности смешанного краевого условия для одного класса поверхностей / В.В. Казак В.В., Н.Н. Солохин // Современные проблемы математики и механики. – 2011. – Т. VI. – Выпуск 2. – Издательство Московского университета. – С. 212– 216. (диссертанта – 0,3 п.л.)